

Liga Matematyczna 2011/12 – Zestaw 1

Zadanie 1

Wykaż, że dla każdego $x \neq 0$ prawdziwe są nierówności:

a)

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} \geq 2$$

b)

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)\left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10.$$

Zadanie 2

W kwadratową tablicę składającą się z 81 jednakowych kwadratowych pól wpisano wszystkie liczby naturalne od 1 do 81. Udowodnij, że dla dowolnego ułożenia liczb istnieją dwie sąsiednie różniące się co najmniej o 6. Przez sąsiednie rozumiemy liczby wpisane w pola o wspólnej krawędzi.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie takie liczby naturalne n , że każda z liczb $n, n + 10, n + 14$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 4

W trójkącie prostokątnym miary jego kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że odcinek prostopadły do przeciwprostokątnej i łączący jej środek z przyprostokątną, jest trzy razy krótszy od tej przyprostokątnej.

Zadanie 5

Udowodnij, że w kole o promieniu 1 nie można wybrać więcej niż 5 punktów tak, by odległość pomiędzy każdymi dwoma spośród nich była większa niż 1.